

La fonction exponentielle.

1. Généralités sur la fonction exponentielle

On commence par admettre le théorème suivant.

Théorème 1

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout nombre réel x , $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.

La relation $f' = f$ est un premier exemple **d'équation différentielle**, c'est à dire une équation dont la ou les « inconnue(s) » sont des fonctions et donnant une relation entre ces fonctions inconnues et leurs fonctions dérivées.

Définition 1

L'unique fonction vérifiant les deux conditions ci-dessus est appelée la **fonction exponentielle**. Elle est notée $\exp(x)$ et on a donc $\exp'(x) = \exp(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ avec $\exp(0) = 1$.

La fonction exponentielle joue un rôle centrale dans différentes branches des mathématiques et vérifie de nombreuses propriétés. La suite de ce cours présente les premières et les plus importantes de ces propriétés.

Propriété 1

La fonction exponentielle ne s'annule jamais. Autrement dit $\exp(x) \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Considérons la fonction g , définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $g(x) = \exp(x) \times \exp(-x)$. C'est une fonction de la forme $g = u \times v$ avec u et v deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Rappelons que pour une fonction dérivable f , la dérivée de la fonction $x \mapsto f(-x)$ est la fonction $x \mapsto -f'(-x)$. En particulier, la dérivée de la fonction $v : x \mapsto \exp(-x)$ est la fonction $v' : x \mapsto -\exp(-x)$. Pour un nombre $x \in \mathbb{R}$, on a donc :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'v + uv' = \exp(x) \times \exp(-x) + \exp(x) \times (-\exp(-x)) \\ &= \exp(x) \times \exp(-x) - \exp(x) \times \exp(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que g est une fonction constante et comme $g(0) = \exp(0) \times \exp(0) = 1$, on peut affirmer que $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Finalement $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ pour tout nombre réel x , ce qui implique que le nombre $\exp(x)$ ne peut jamais être égal à 0.

□

Cette première propriété implique en particulier que l'on peut diviser par le nombre $\exp(x)$ à tout moment, sans se soucier d'une éventuelle division par 0.

2. Propriétés algébriques de la fonction exponentielle

La relation suivante est fondamentale si bien qu'elle est parfois prise comme définition de la fonction exponentielle. Remarquez le lien qui est établi entre deux mondes : le monde additif et le monde multiplicatif.

Théorème 2

L'exponentielle d'une somme de deux nombres est égale au produit de l'exponentielle de chacun de ces nombres. Autrement dit, pour tous nombres réels x et y , on a $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration

Fixons un nombre $y \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f par $f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$. En tant que quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x+y)\exp(x)}{(\exp(x))^2} = 0$$

On en déduit que f est une fonction constante. Ainsi, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = f(0) = \exp(y)$.

Par conséquent, $\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$, d'où $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$. $\square$

Propriété 2

Pour tous nombres réels x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Démonstration

Pour tous nombres réels x et y , on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Donc, en prenant $y = -x$, on obtient $\exp(x) \times \exp(-x) = \exp(x-x) = \exp(0) = 1$. $\square$

Nous avons déjà vu que l'exponentielle transforme les sommes en produits. Nous allons voir qu'elle transforme les différences en quotients.

Propriété 3

Pour tous nombres réels x et y , on a $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

Démonstration

Pour tous nombres réels x et y , on a $\exp(x-y) = \exp(x+(-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)}$. $\square$

Propriété 4

Pour tout réel x et pour tout entier relatif n , on a $(\exp(x))^n = \exp(nx)$. *Preuve par récurrence sur n ...*

Exercice 1

Simplifier les nombres suivants sous la forme $\exp(n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

1) $\exp(5) \times \exp(10) \times (\exp(4))^3$ 2) $\exp(4) \times \exp(7) \times \exp(-4)$ 3) $\exp(-10) \times \exp(6)$

4) $(\exp(5))^{-3}$ 5) $\frac{1}{(\exp(12))^{-4}}$ 6) $\frac{\exp(2) \times (\exp(-6))^2}{\exp(3)}$

3. Notation exponentielle

Definition 2

Le nombre e , parfois appelé nombre d'Euler, est défini par $e = \exp(1)$. C'est un nombre irrationnel tel que $e \approx 2,718281828\dots$

L'introduction de ce nombre est justifiée par la propriété 4 ci-dessus. En effet, cette propriété nous dit que pour tout nombre entier relatif n , $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$. Autrement dit, les quantités $\exp(n)$ sont les puissances d'un même nombre, à savoir le nombre e . Il est alors tentant d'introduire une nouvelle notation :

Notation

Pour tout nombre réel x , on note $e^x = \exp(x)$.

Avec cette notation, les propriétés précédentes prennent une forme plus concise et plus facile à retenir car elles correspondent à ce que nous connaissons déjà à propos des puissances.

Propriétés 5

Pour tous nombres réels x et y et pour tout entier relatif n :

$$\bullet e^{x+y} = e^x \times e^y \quad ; \quad \bullet e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ; \quad \bullet e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad ; \quad \bullet (e^x)^n = e^{nx}$$



Ces quatre relations sont à connaître sur le bout des doigts, au même titre que les identités remarquables, les formules de dérivation ect ...

Exercice 2

Écrire les nombres suivants en utilisant une seule fois la lettre e :

$$\bullet \frac{1}{e^{-3}} \quad ; \quad \bullet \frac{(e^7)^4 \times e^3}{e^4} \quad ; \quad \bullet e^{2x} \times e^{-x}$$

Propriété 6

La fonction exponentielle est strictement positive. Autrement dit, pour tout nombre réel x , on a $e^x > 0$.

Démonstration

On sait déjà que l'exponentielle ne s'annule jamais (propriété 1).

De plus, pour tout nombre réel x , on a $e^x = e^{\frac{x}{2} + \frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \times e^{\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$.

Or le carré d'un nombre réel, s'il n'est pas nul, est nécessairement un nombre positif.

Donc $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 > 0$ et finalement $e^x > 0$. □

Recherche 1

$$\bullet e \times e^2 \times e^3 \times \dots \times e^{98} \times e^{99} = \dots \quad \bullet \text{ Pour tout réel } x, \sqrt{e^x} = \dots \text{ (définition de la racine carrée ?)}$$

4. Étude de la fonction exponentielle

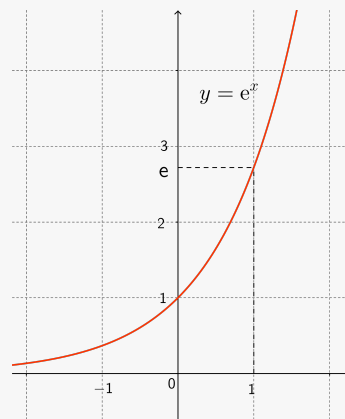
Par définition, la fonction exponentielle est sa propre dérivée. Or, nous venons de voir que la fonction exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives. La dérivée de la fonction exponentielle est donc strictement positive et cela nous donne la propriété suivante :

Propriété 7

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp(x)$		+		
$\exp$		1	e	

Recherche : L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse $x = 0$ est $y = \dots$



Comme toutes fonctions strictement croissantes, la fonction exponentielle, appliquée aux deux membres d'une équation (ou d'une inéquation), ne change rien à l'ensemble des solutions. Plus précisément, on a les trois équivalences suivantes :

Propriété 8

Pour tous nombres réels a et b :

$$\bullet e^a = e^b \iff a = b \quad \bullet e^a < e^b \iff a < b \quad \bullet e^a > e^b \iff a > b$$

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.

Recherche 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$.

Enfin, de par sa définition, la fonction exponentielle est particulièrement simple à dériver. Qu'en est-il des fonctions du type $f(x) = e^{u(x)}$ avec u une fonction dérivable ?

Propriété 9

Soit u une fonction définie et dérivable sur un domaine D . La fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est définie et dérivable sur D et on a

$$f'(x) = u'(x)e^{u(x)} \quad \text{ce qui s'écrit aussi} \quad f'(x) = u'(x)f(x).$$

Cette nouvelle formule de dérivation se retient généralement sous la forme $(e^u)' = u'e^u$.

Exercice 4

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes (définies et dérivables sur $\mathbb{R}$) :

$$\bullet f(x) = e^{3x+4} \quad \bullet g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{4x-1}} \quad \bullet h(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$$